MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican $AX + X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax & si\ x < 1 \\ bx + c & si\ x \geq 1 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$ y calcula el punto en el que se cumple el teorema.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 - 2x$ y la recta $y = x$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

3. Dada la recta $r: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r.

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x + y + z - 5 = 0$.

4. En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x \qquad - z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m = 1$.

2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x \to 0} \frac{cos2x + mx^2 - 1}{sen(x^2)} = 3$

b) Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0,5)$ y la tangente a su gráfica en el punto $(1,1)$ sea paralela al eje X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x} lnx dx$ (Nota: $ln = logaritmo\ neperiano$)

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9,4,1)$ y $Q(1,1,1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-1}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Calcula, si se cortan, el punto de corte.

b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s.

c) Calcula la distancia del punto $O(0,0,0)$ a la recta s.

4. En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, la B un 4% y la C un 5%.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?

SOLUCIÓN

OPCIÓN A

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A-\lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices X que verifican $AX+X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

a) $$|A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=0+0-1-0-0-0=-1$$

$$A^t=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow Adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}0&+1&0\\0&0&+1\\+1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\qquad A^t=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=A^t$$

b) $$\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&-1\\-1&-\lambda&0\\0&-1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&-1\\-1&-\lambda&0\\0&-1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+0-1-0-0-0=-\lambda^3-1$$

$$-\lambda^3-1=0$$
$$\lambda=\sqrt[3]{-1}=-1$$

$$\lambda\neq-1\quad\Rightarrow\quad Rango\left(A-\lambda I\right)=3$$
$$\lambda=-1\quad\Rightarrow\quad Rango\left(A-\lambda I\right)=2$$

$$Ax+x=0$$
$$\left(A+I\right)\cdot x=0$$

$$\left(A+I\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+0-1-0-0-0=0$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{matrix}x-z=0&x=z\\-x+y=0&x=y\\-y+z=0&y=z\end{matrix}\qquad x=y=z=0.$$ HOMOGÉNEO

2. a) Enuncia el teorema de Rolle. Calcula a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax & si\ x<1\\ bx+c & si\ x\geq 1\end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,2] y calcula el punto en el que se cumple el teorema.
b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la parábola $y=x^2-2x$ y la recta $y=x$. (Para el dibujo de la parábola, indica: puntos de corte con los ejes de coordenadas, el vértice y concavidad o convexidad)

a) ROLLE

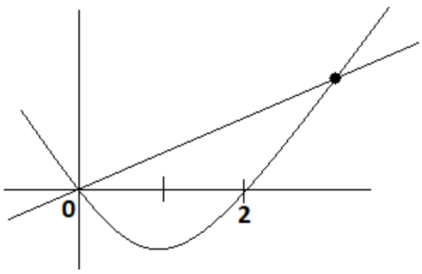
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2+ax=2+a\\ \lim\limits_{x\to 1^+} bx+c \quad =b+C\\ f(1)=b+c\end{array}\right\} 2+a=b+c$$

$$f'(x)=\begin{cases}4x+a & x<1\\ b & x>1\end{cases} \quad \left.\begin{array}{l}f'(1^-)=4+a\\ f'(1^+)=b\end{array}\right\} 4+a=b$$

$$\left.\begin{array}{l}f(a)=f(b)\\ f(0)=f(2)\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}f(0)=0\\ f(2)=2b+c\end{array}\right\} 2b+c=0 \Rightarrow c=-2b$$

$\boxed{a=-3}$ $\boxed{b=1}$ $\boxed{c=-2}$

b)



$$x^2-2x=0 \qquad x=0$$
$$x(x-2)=0 \qquad x=2$$

$$x^2-2x=x$$
$$x^2-3x=0 \qquad x=0$$
$$x(x-3)=0 \qquad x=3$$

$$VÉRTICE \to \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{2}{2}=1 \qquad \boxed{V(1,-1)}$$

$$\int_0^3 x-(x^2-2x)dx$$

$$\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{2}-\frac{27}{3}+9-0=\frac{9}{2}u^2$$

3. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el punto $A(1,1,1)$ y es perpendicular a r.

b) Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $P(-1,0,6)$ y $Q(3,-2,4)$ y es paralelo a la recta r.

c) Calcula la distancia de la recta r al plano $x+y+z-5=0$.

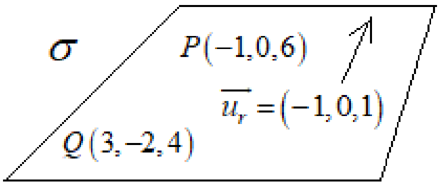
$$r:\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow \begin{array}{l} x+y=2+\lambda \\ \underline{x-y=2-\lambda} \\ 2x=4-2\lambda \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2y=0 \\ \boxed{y=0} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=2-\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array} \qquad \overrightarrow{u_r}=(-1,0,1) \rightarrow Ax+By+Cz+D=0$$

$$A(1,1,1)\in\pi \qquad \pi\equiv -x+z+D=0 \qquad -1+1+D=0 \qquad \boxed{D=0}$$

a) $\pi\equiv -x+z+0=0$

b) $\sigma\equiv 2x+2y+2z-10=0$



$$\sigma\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,0,1) \\ PQ(4,-2,-2) \\ P(-1,0,6) \end{cases}$$

$$\sigma\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y & z-6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$4y+2z-12-2y+2x+2=0$$
$$2x+2y+2z-10=0$$

c) $d(r,\pi)=\dfrac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Rightarrow \dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot 0-5|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,u$

4. En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo
a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.
b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

a) $X =$ nº de veces que sale 7, de entre 5 extracciones del bombo.

$$n = 5 \qquad p = 0'1 \qquad q = 0'9 \qquad B(n,p) \rightarrow B(5, 0'1)$$

$$p(x<2) = p(x=0) + p(x=1) = \binom{5}{0} 0'1^0 \cdot 0'9^5 + \binom{5}{1} 0'1^1 \cdot 0'9^4$$

b) $n = 100 \rightarrow$ aproximación a una normal

$$\mu = np = 100 \cdot 0'1 = 10 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0'1 \cdot 0'9} = 3$$

$$B(100, 0'1) \rightarrow N(10, 3)$$

$$p(x<9) \xrightarrow[\text{Corrección de yates}]{} p(x' \leq 8'5) = p\left(z \leq \frac{8'5-10}{3}\right) =$$

$$= p(z \leq -0,5) = 1 - p(z \leq 0,5) = 1 - 0,3085 = 0,0695$$

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x \quad\; -z=m \\ x+y-z=1 \end{cases}$

b) Resuélvelo, si es posible, cuando $m=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-2-1-0+2+1=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0+2m+1-0-2-m=m-1=0 \quad \boxed{m=1}$$

$m\neq 1 \qquad Rg\,A=2\neq Rg\,\overline{A}=3 \quad n=3 \qquad S.I$

$m=1 \qquad Rg\,A=2=Rg\,\overline{A}=2 \quad n=3 \qquad S.C.I$

b) $m=1$

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-z=1 \\ z+y-z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y=1+\underset{z=\lambda}{z}-\underset{x=1+\lambda}{x} \\ x=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow 2y=1+\lambda-1-\lambda \qquad y=0$$

$\boxed{y=0}$

$\boxed{x=1+\lambda}$

$\boxed{z=\lambda}$

2. a) Calcula, si existe, el valor de m para que $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{sen(x^2)}=3$

b) Calcula los valores de a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un punto de inflexión en el punto (0,5) y la tangente a su gráfica en el punto (1,1) sea paralela al eje X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$ (Nota: $ln = logaritmo\ neperiano$)

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{sen\left(x^2\right)}=3 \qquad \frac{1+0-1}{0}=\frac{0}{0}$

$$L'Hôpital\ \lim_{x\to 0}\frac{-2sen2x+2mx}{2x\cdot\cos x^2}=\frac{0+0}{0}=\frac{0}{0}$$

$$L'Hôpital\ \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+2m}{2\cos x^2+2x\cdot 2x\left(-\text{sen}\, x^2\right)}=\frac{-4+2m}{2+0}=3$$

$$-4+2m=6 \qquad 2m=10 \qquad \boxed{m=5}$$

b)

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad f(0)=5\to 5=0+0+0+d \qquad \boxed{d=5}$$

$$f''(x)=6ax+2b$$

$$f''(0)=0 \quad 0=0+2b \qquad \boxed{b=0}$$

$$f(1)=1\Rightarrow \boxed{1=a+b+c+d} \qquad f'(1)=tg0^{\circ} \qquad \boxed{3a+2b+c=0}$$

$$1=a+0+c+5\to a+c=-4 \qquad 2+c=-4$$

$$3a+c=0 \qquad \boxed{c=-6}$$

$$-2a=-4 \qquad \boxed{a=2}$$

c)

$$\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx=\frac{2}{3}\ln x\left(\sqrt{x^3}\right)-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}\Big]_1^e=\frac{2}{3}\sqrt{e^3}-\frac{4}{9}\sqrt{e^3}+\frac{4}{9}=\frac{2}{9}\sqrt{e^3}+\frac{4}{9}$$

$$\int\sqrt{x}\ln x dx=\text{lnx}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\int\frac{x^{3/2}}{x}dx=\frac{2}{3}\ln x\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}(\ln x)\sqrt{x^3}-\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+C$$

$$\ln x=u \qquad \frac{1}{x}dx=du$$

$$\sqrt{x}dx=dv \qquad \frac{x^{3/2}}{3/2}=v$$

3. Sea r la recta que pasa por los puntos $P(9,4,1)$ y $Q(1,1,1)$. Dada la recta $s: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-1}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. Calcula, si se cortan, el punto de corte.

b) Calcula, si existe, la ecuación implícita o general del plano que contiene a las rectas r y s.

c) Calcula la distancia del punto $O(0,0,0)$ a la recta s.

a)

$$\vec{u_r}=\overrightarrow{PQ}(-8,-3,0) \qquad A_r(1,1,1)$$
$$\vec{u_s}(2,1,-1) \qquad A_s(1,0,5)$$
$$\overrightarrow{A_rA_s}=(0,-1,4)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0+0-32+24+8=0$$

$$Rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{A_rA_s} \\ \vec{u_r} \\ \vec{u_s} \end{pmatrix}=2 \qquad Rg\begin{pmatrix} \vec{u_r} \\ \vec{u_s} \end{pmatrix}=2 \quad \Rightarrow \quad SECANTES$$

$$r\equiv\begin{cases} x=1-8\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=0+\lambda \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda' \\ y=\lambda' \\ z=5-\lambda' \end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \\ z=4 \end{matrix}}$$ Punto de corte 8

$$\begin{array}{r} \lambda=5-\lambda' \\ -(-3+\lambda=\lambda') \\ \hline 3=5-2\lambda' \end{array} \qquad \boxed{\lambda'=1}$$

b)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad -6z+6+8y8+8z'8'3x+3=0 \qquad \boxed{-3x+8y+2z-7=0}$$

c)

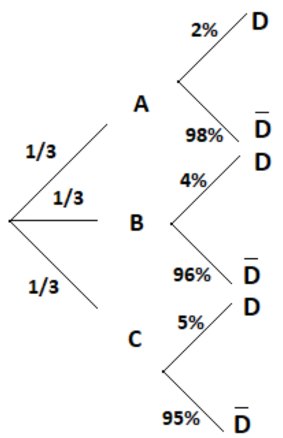
$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{u_r}\right|}{\left|\vec{u_r}\right|} \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=5\vec{i}-11\vec{j}-\vec{k}$$

$$P(0,5)=\frac{\overbrace{\left|(-1,0,-5)\times(2,1,-1)\right|}^{(5,-11,1)}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{25+121+1}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{6}}$$

4. En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2% de piezas defectuosas, la B un 4% y la C un 5%.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?



a) $P_D = \frac{1}{3}\cdot 0'02 + \frac{1}{3}\cdot 0'04 + \frac{1}{3}\cdot 0'05$ $\quad$ $D =$ suceso ser defectuoso

$P_D = 0'037$ $\quad$ $\overline{D} =$ suceso no ser defectuoso

b)

$$P\left(\frac{A}{\overline{D}}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P\overline{D}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0'98}{\frac{1}{3}\cdot 0'98 + \frac{1}{3}\cdot 0'96 + \frac{1}{3}\cdot 0'95} = \frac{0'33}{0'96} = 0'34$$