[MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

OPCIÓN A.

1. As vendas de tres produtos P1, P2 e P3, relacionados entre si, dá lugar ao seguinte sistema de ecuacións lineais $x+y+z=6$; $x+y-z=0$; $2x-y+z=3$, sendo x, y, z as vendas dos produtos P1, P2 e P3 respectivamente
a) Expresa o sistema en forma matricial $AX = B$. **b)** Calcula a matriz inversa de A, sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes. **c)** Calcula as vendas x, y, z para eses tres produtos.

2. Un novo produto ten unha demanda en miles de unidades que responde aproximadamente á función $N(t) = 5 + 20t/(1+t^2)$, $t \geq 0$ en meses.
a) Estuda o crecemento e decrecemento da demanda. Calcula a demanda máxima e o momento no que se alcanza. **b)** Avalía a tendencia a longo prazo e representa a función. **c)** Despois do máximo, baixaría a demanda de 11.000 unidades? Cando?

3. Nunha empresa, o 30 % dos empregados son mulleres e o 70 % restante son homes. Das mulleres, o 80 % teñen contrato indefinido, mentres que do grupo dos homes, só o 70 % ten ese tipo de contrato. **a)** Calcula a porcentaxe de persoas da devandita empresa que ten contrato indefinido. **b)** Se un empregado ten contrato indefinido obtén a probabilidade de que sexa muller. **c)** ¿Son independentes os sucesos "ser home" e "ter contrato indefinido"?

4. Nun estanque deséxase estimar a porcentaxe de peixes dourados. Para iso, tómase unha mostra aleatoria de 700 peixes e atópase que exactamente 70 deles son dourados.
a) Acha, cun nivel de confianza do 99 %, un intervalo para estimar a proporción de peixes dourados no estanque **b)** No intervalo anterior, canto vale o erro de estimación? **c)** Considerando dita mostra, que lle ocorrería ao erro de estimación se aumentase o nivel de confianza? Xustifica a resposta.

OPCIÓN B.

1. Un centro comercial ten en existencias 750 reprodutores de DVD no almacén A e outros 600 no almacén B. Se se quere ter polo menos 900 reprodutores en tenda e que os do almacén A non excedan o triplo dos de B:
a) Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Poderíanse enviar 400 unidades desde cada almacén? **b)** Se os custos unitarios de envío son 0,30 euros por unidade para o almacén A e 0,25 euros por unidade para o almacén B, cantas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar o custo de transporte? A canto ascendería o devandito custo?

2. Un ximnasio abre ao público a principios de 2008, a función $G(t)=\begin{cases} 10\left(5t-t^2\right) & \text{se } 0\leq t\leq 4 \\ 80-10t & \text{se } 4<t\leq 10 \end{cases}$
indica como evolucionaron as súas ganancias (en miles de euros) en función do tempo t (en anos) transcorrido desde a súa apertura, correspondendo $t = 0$ a principios de 2008.
a) Estuda en que períodos se produciu un aumento e nos que se produciu unha diminución das súas ganancias
b) A canto ascenderon as ganancias máximas? En que ano se obtiveron?
c) Representa a gráfica da función G(t). Nalgún ano logo da súa apertura non se obtiveron ganancias? A partir dalgún ano deixou de ser rendible o ximnasio? Cando?

3. Nunha poboación de cada 200 consumidores dunha bebida isotónica 60 consumen a marca A, 50 a marca B e o resto a marca C. Ademais, o 30% de consumidores de A, o 20% de consumidores de B e o 40% de consumidores de C son mozos. **a)** Selecciónase ao azar un consumidor de dita bebida nesa poboación, cal é a probabilidade de que sexa mozo? **b)** Se se seleccionou un mozo acha a probabilidade de que consuma a marca B. **c)** Son independentes os sucesos "ser mozo" e "consumir a marca A"?

4. Nunha empresa quérese racionalizar o gasto en teléfono móbil dos seus axentes comerciais. Para iso faise un estudo sobre unha mostra dos devanditos axentes e obtense: "cunha confianza do 95%, a media do gasto mensual en teléfono móbil está entre 199,71 e 220,29 euros". Supoñendo que o gasto en teléfono móbil é unha variable normal **a)** Calcula o gasto medio mostral e o erro cometido na estimación. **b)** Se a desviación típica é de 42 euros, que tamaño ten a mostra?

SOLUCIÓN. OPCIÓN A

1. As vendas de tres produtos P1, P2 e P3, relacionados entre si, dá lugar ao seguinte sistema de ecuacións lineais x+y+z=6; x+y-z=0; 2x-y+z=3, sendo x, y, z as vendas dos produtos P1, P2 e P3 respectivamente
a) Expresa o sistema en forma matricial AX = B. **b)** Calcula a matriz inversa de A, sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes. **c)** Calcula as vendas x, y, z para eses tres produtos.

$$\begin{array}{ll} x+y+z=6 & x\to P_1 \\ x+y-z=0 & y\to P_2 \\ 2x-y+z=3 & z\to P_3 \end{array}$$

a) $Ax=B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\substack{F_3-2F_1\\F_2-F_1}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\frac{F_2}{6}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3+3F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1-F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{-F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

c) $Ax=B$

$$A\cdot A^{-1}x=A^{-1}B$$

$$x=A^{-1}B$$

$$x=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \boxed{x=1;\quad y=2;\quad z=3}$$

2. Un novo produto ten unha demanda en miles de unidades que responde aproximadamente á función N (t) = 5 + 20t/(1 + t^2), t≥0 en meses.
a) Estuda o crecemento e decrecemento da demanda. Calcula a demanda máxima e o momento no que se alcanza. **b)** Avalía a tendencia a longo prazo e representa a función. **c)** Despois do máximo, baixaría a demanda de 11.000 unidades? Cando?

$N(t)=$ miles de unidades $\qquad t\geq 0 \quad t$ en meses

$$N(t)=5+\frac{20t}{(1+t^2)}$$

a)

$$N'(t)=\frac{20(1+t^2)-20t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}=\frac{20+20t^2-40t^2}{(1+t^2)^2}=$$

$$=\frac{-20t^2+20}{(1+t^2)^2}=\frac{20(-t^2+1)}{(1+t^2)}$$

$$N'(t)=0\rightarrow 20(-t^2+1)=0 \begin{cases} \nearrow t=1 \ \ mes \\ \searrow t=-1 \ \ no\,vale\end{cases}$$

$(0,1)$ *creciente*

$(1,\infty)$ *decreciente*

$t = 1\ mes \rightarrow máximo \qquad N(1) = 5 + \frac{20}{2} = 15\ miles\ de\ unidades$

$Máximo\ (1,15)$

Se alcanza al cabo de $1\ mes$ y son $15000\ unidades$

b) $\lim\limits_{t \to \infty} 5 + \frac{20t}{(1+t^2)} = 5\ miles\ de\ unidades$

A largo plazo la demanda sería de $5000\ unidades$

c) $11 = 5 + \frac{20t}{(1+t^2)}$

$11(1+t^2) = 5(1+t^2) + 20t$

$11 + 11t^2 = 5 + 5t^2 + 20t$

$6t^2 - 20t + 6 = 0$

$3t^2 - 10t + 3 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

A los $3\ meses$ la demanda sería de $11000\ unidades$

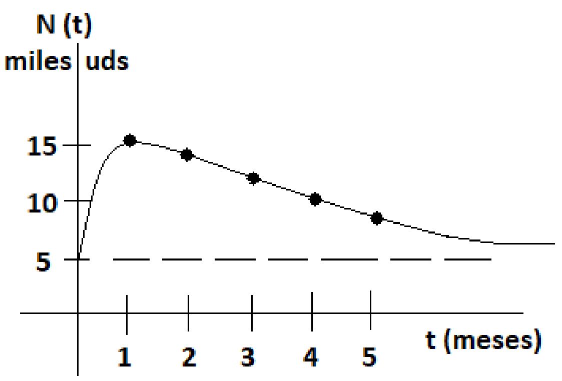
Representación

$t = 0 \quad N(t) = 5000\ u$

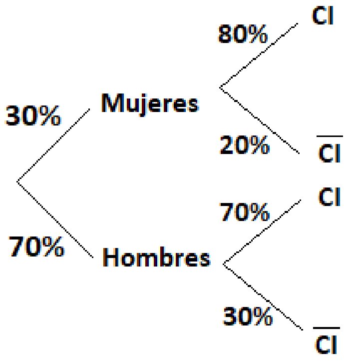
$t = 1 \quad N(t) = 15.000\ u \ \ (Máximo)$

$t = 2 \quad N(t) = 13.000\ u$

$t = 3 \quad N(t) = 11.000\ u$



3. Nunha empresa, o 30 % dos empregados son mulleres e o 70 % restante son homes. Das mulleres, o 80 % teñen contrato indefinido, mentres que do grupo dos homes, só o 70 % ten ese tipo de contrato. **a)** Calcula a porcentaxe de persoas da devandita empresa que ten contrato indefinido. **b)** Se un empregado ten contrato indefinido obtén a probabilidade de que sexa muller. **c)** ¿Son independentes os sucesos "ser home" e "ter contrato indefinido"?



a)

$$\%C.I = 100(0'3 \cdot 0'8 + 0'7 \cdot 0'7) = 0'24 + 0'49 = 0'73 \cdot 100 = 73\%$$

El 73% tienen contrato indefinido

b)

$$P\left(\frac{M}{CI}\right) = \frac{P(M \cap CI)}{P(CI)} = \frac{0'3 \cdot 0'8}{0'73} = \frac{0'24}{0'73} \simeq 0'33$$

c)

$$P(H \cap CI) = 0'7 \cdot 0'7 = 0'49$$
$$PH \cdot PCI = 0'7 \cdot 0'73 = 0'51$$

$P(H \cap CI) \neq PH \cdot PCI$. No son sucesos independientes

4. Nun estanque deséxase estimar a porcentaxe de peixes dourados. Para iso, tómase unha mostra aleatoria de 700 peixes e atópase que exactamente 70 deles son dourados.

a) Acha, cun nivel de confianza do 99 %, un intervalo para estimar a proporción de peixes dourados no estanque **b)** No intervalo anterior, canto vale o erro de estimación? **c)** Considerando dita mostra, que lle ocorrería ao erro de estimación se aumentase o nivel de confianza? Xustifica a resposta.

$n = 700 \ peces \qquad 70 \to peces \ dorados$

Nivel de confianza del $99\% \to$ intervalo de proporción

a) $n = 700 \qquad \hat{p} = \frac{7\cancel{0}}{70\cancel{0}} = \frac{1}{10} = 0'1$

$$IC : \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

Nivel de confianza $99\% \to \alpha = 0'01 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$

$$IC = \left(0'1 - 2'575\sqrt{\frac{0'1 \cdot 0'9}{700}}, 0'1 + 2'575\sqrt{\frac{0'1 \cdot 0'9}{700}} \right)$$

$$IC = (0'1 - 2'575 \cdot 0'011, 0'1 + 2'575 \cdot 0'011) =$$

$$= (0'1 - 0'028, 0'1 + 0'028) = (0'072, 0'128)$$

b)

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$E = 2'575 \cdot 0'011 = 0'028$$

c) El margen de error viene dado por la amplitud del intervalo.

Si aumenta el nivel de confianza el margen de error será mayor.

SOLUCIÓN. OPCIÓN B

1. Un centro comercial ten en existencias 750 reprodutores de DVD no almacén A e outros 600 no almacén B. Se se quere ter polo menos 900 reprodutores en tenda e que os do almacén A non excedan o triplo dos de B:

a) Formula o problema e representa graficamente o conxunto de solucións. Poderíanse enviar 400 unidades desde cada almacén? **b)** Se os custos unitarios de envío son 0,30 euros por unidade para o almacén A e 0,25 euros por unidade para o almacén B, cantas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar o custo de transporte? A canto ascendería o devandito custo?

A	**x**	**750**
B	**y**	**600**

a) Restricciones

$x \leq 750 \quad x \geq 0$

$y \leq 600 \quad y \geq 0$

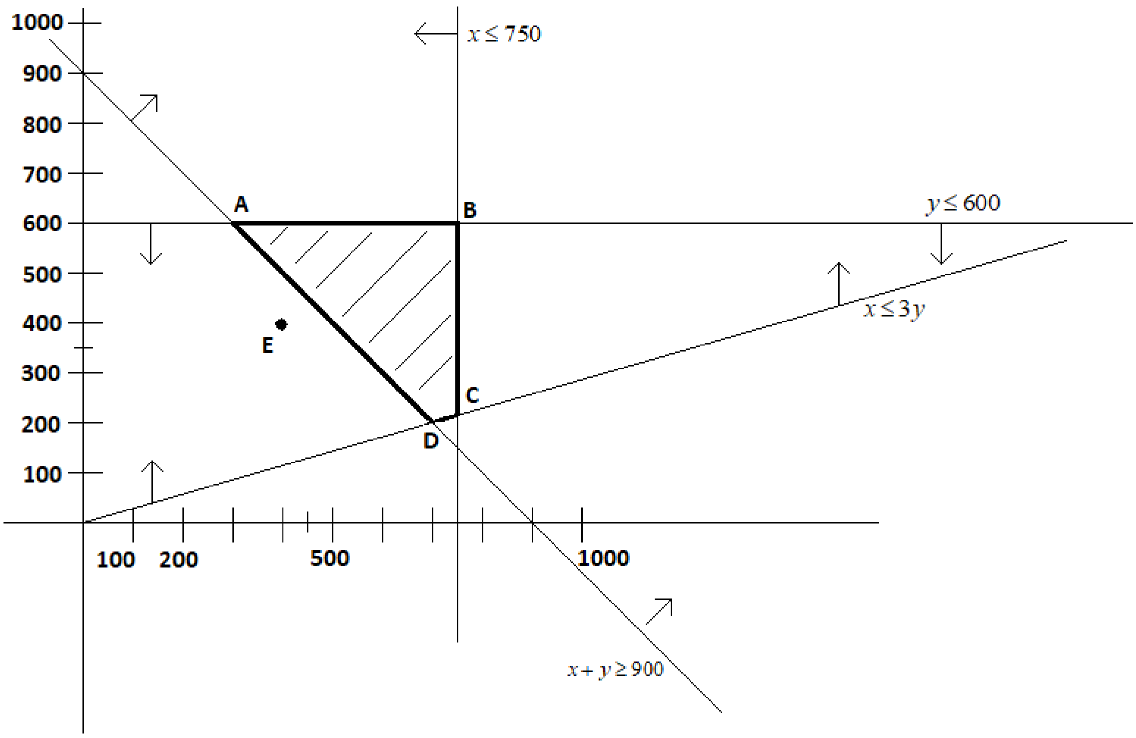
(1)

$x + y \geq 900$

x	y
0	900
900	0
450	450

(2) $x \leq 3y \qquad x - 3y \leq 0 \quad y \geq \dfrac{x}{3}$

x	y
0	0
900	900
600	200



No se podrían enviar 40 unidades desde cada almacén ya que quedan fuera del conjunto de soluciones (E).

b) $F(x \cdot y) = 0'30x + 0'25y$

$A(300,600)$
$B(750,600)$
$C(750,250)$
$D(675,225)$

$$\left.\begin{matrix} x+y=900 \\ x-3y=0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x+y=900 \\ -x+3y=0 \end{matrix}\right\} 4y=900 \qquad y=\frac{900}{4} \Rightarrow y=225 \qquad x=900-225=675$$

$FA = 0'30 \cdot 300 + 0'25 \cdot 600 = 90 + 150 = 240€$
$FB = 0'30 \cdot 750 + 0'25 \cdot 600 = 225 + 150 = 375€$
$FC = 0'30 \cdot 750 + 0'25 \cdot 250 = 225 + 62'5 = 287'5€$
$FD = 0'30 \cdot 675 + 0'25 \cdot 225 = 202'5 + 56'25 = 258'75€$

Paran minimizar el coste habría que enviar 300 unidades de A y 600 de B.

El coste sería 240€.

2. Un ximnasio abre ao público a principios de 2008, a función G(t)= $\begin{cases} 10(5t-t^2) & \text{se } 0 \le t \le 4 \\ 80-10t & \text{se } 4 < t \le 10 \end{cases}$ 8

indica como evolucionaron as súas ganancias (en miles de euros) en función do tempo t (en anos) transcorrido desde a súa apertura, correspondendo t = 0 a principios de 2008.

a) Estuda en que períodos se produciu un aumento e nos que se produciu unha diminución das súas ganancias
b) A canto ascenderon as ganancias máximas? En que ano se obtiveron?
c) Representa a gráfica da función G(t). Nalgún ano logo da súa apertura non se obtiveron ganancias? A partir dalgún ano deixou de ser rendible o ximnasio? Cando?

$$G(t) = \begin{cases} 10(5t-t^2) & se \quad 0 \le t \le 4 \\ 80-10t & se \quad 4 < t \le 10 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Miles\ de\ € \\ (2008) \to t=0 \end{matrix}$$

a)

$$10(5t-t^2)=0 \to 5t-t^2=0 \to t(5-t)=0 \begin{matrix} \nearrow t=0 \\ \searrow t=5 \end{matrix} \qquad (0,0),\ (5,0)$$

$G_0 = 0\ (miles\ de\ €)$ $\qquad G_5 = 30\ (miles\ de\ €)$
$G_2 = 60\ (miles\ de\ €)$ $\qquad G_7 = 10\ (miles\ de\ €)$
$G_4 = 40\ (miles\ de\ €)$ $\qquad G_{10} = -20\ (miles\ de\ €)$

<u>Parábola</u>

$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-20} = 2'5$
$V_y = 62'5$
$V(2'5, 62'5)$

<u>Recta</u>

$80-10t=0$
$t=8$
$(Corte\ al\ eje\ X)$

$$G'(t)=\begin{cases}50-20t & 0<t<4\\ -10 & 4<t<10\end{cases}$$

$$50-20t=0 \qquad t=\frac{50}{20}=2'5\ años$$

Se produjo un aumento de ganancias desde 0 a $2'5$. Disminuyeron desde $2'5$ hasta $10\ años$

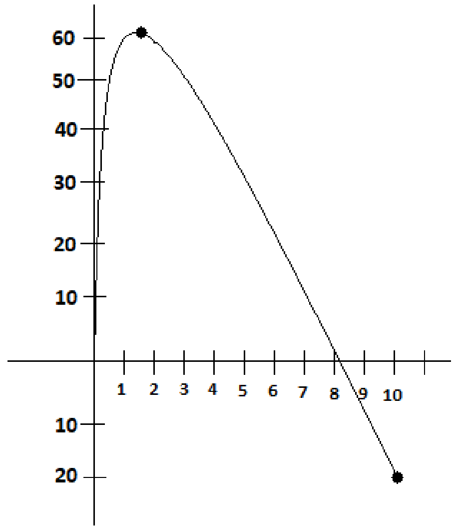
$(0,2'5)\quad Creciente$

$(2'5,10)\ \ Decreciente$

b) Ganancias máximas $62'5$ miles de €

$G(2'5)=50\cdot 2'5-10\cdot 2'5^2=62'5\ miles\ de\ €$ a mediados del 2010

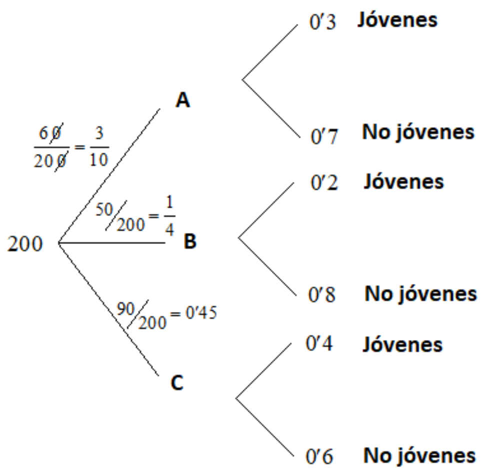
c)



No se obtuvieron ganancias en el año 2016 (año 8). Dejó de ser rentable a partir de 2016 hasta el cierre en 2018.

3. Nunha poboación de cada 200 consumidores dunha bebida isotónica 60 consumen a marca A, 50 a marca B e o resto a marca C. Ademais, o 30% de consumidores de A, o 20% de consumidores de B e o 40% de consumidores de C son mozos. **a)** Selecciónase ao azar un consumidor de dita bebida nesa poboación, cal é a probabilidade de que sexa mozo? **b)** Se se seleccionou un mozo acha a probabilidade de que consuma a marca B. **c)** Son independentes os sucesos "ser mozo" e "consumir a marca A"?

$$200\begin{cases} A = 60 \rightarrow 30\%\text{ jóvenes} \\ B = 50 \rightarrow 20\%\text{ jóvenes} \\ C = 90 \rightarrow 40\%\text{ jóvenes} \end{cases}$$



	J	NJ	
A	**18**	**42**	**60**
B	**10**	**40**	**50**
C	**36**	**54**	**90**
	64	**136**	**200**

10

a) $PJ \rightarrow$ Probabilidad de ser joven

$$PJ = \frac{64}{200} = \frac{8}{25}$$

b) $P\left(\frac{B}{J}\right) = \frac{P(B \cap J)}{PJ} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

c)

$P(J \cap A) = \frac{18}{200} = \frac{9}{100}$ $\quad P(J \cap A) \neq P_J \cdot P_A$. Son distintos por lo que no son independientes

$$P_J \cdot P_A = \frac{8}{25} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{250}$$

4. Nunha empresa quérese racionalizar o gasto en teléfono móbil dos seus axentes comerciais. Para iso faise un estudo sobre unha mostra dos devanditos axentes e obtense: "cunha confianza do 95%, a media do gasto mensual en teléfono móbil está entre 199,71 e 220,29 euros". Supoñendo que o gasto en teléfono móbil é unha variable normal **a)** Calcula o gasto medio mostral e o erro cometido na estimación. **b)** Se a desviación típica é de 42 euros, que tamaño ten a mostra?

Confianza 95%

a) $\bar{x} \in (199'71, 220'29)$

Media muestral $\bar{x} = \dfrac{199'71 + 220'29}{2} = 210€$

Error $= 10'29€$

$210 - 199'71 = 10'29€$

b) $\alpha = 0'05$ $\quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

$z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{42}{\sqrt{n}} = 10'29$

$n = \left(\dfrac{1'96 \cdot 42}{10'29} \right)^2 \rightarrow n = 64$